

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE M'SILA MOHAMED BOUDIAF
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES**

Mémoire présenté en mathématiques

Par

Hadji Atmane

THÈME

Sur les treillis distributifs fermés

Soutenu publiquement, le 06/2013 devant le jury composé de :

Mr:A.Amroune

Remerciements

*Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur **A.Amrroune** pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.*

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir, mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents et mes frères pour leur soutien tout au long de mes études.

Résumé

Dans ce travail, on a essayé de donner un aperçu sur les différentes propriétés des ensembles et la classe particulière d'ensembles ordonnés à savoir les treillis distributifs, treillis de Boole, algèbres de Boole. On a étudié également les propriétés des filtres et des idéaux dans un treillis distributif ainsi que dans une algèbre de Boole.

On a également donné le théorème de représentation de Stone des treillis distributifs.

Après quelques généralités sur les espaces topologiques, on définit les espaces de Priestley, ainsi qu'une étude sur la dualité de Priestley pour les treillis distributifs fermés.

In this work, we try to give an overview on the different properties of ordered sets and special class of ordered sets namely distributive lattices, Boolean lattices, Boolean algebra. We also studied the properties of filters and ideals in a distributive lattices and a Boolean algebras.

We also gave the Stone representation theorem for bounded distributive lattices.

After giving some properties on general topological spaces, we define Priestley spaces and we gave a study on Priestley duality for bounded distributive lattices.

Table des matières

Introduction	1
1 Ensembles ordonnés et treillis	2
1.1 Ensembles ordonnés	3
1.1.1 Définitions et notations	3
1.1.2 Propriétés d'une relation	5
1.1.3 Infimums, supremums	8
1.1.4 Parties commençantes, parties finissantes	9
1.1.5 Produit direct	10
1.1.6 Applications croissantes	10
1.2 Treillis	11
1.2.1 Quelques exemples de treillis	11
1.2.2 Structures algébriques	12
1.2.3 Treillis distributifs	15
1.2.4 Treillis complémentés	17
1.2.5 Treillis de Boole	18
1.2.6 Algèbres de Boole	19
1.3 Homomorphismes et isomorphismes	19
1.4 Théorème de représentation de Stone des treillis distributifs	21
1.5 Représentation des treillis distributifs	22

2	Représentation des treillis distributifs	24
2.1	Ensembles croissants	25
2.2	Espaces ordonnés	25
2.3	Espace totalement discontinu	25
2.4	Espaces de Priestley	25
2.5	Etude de la dualité topologique	26
3	Exemples	30
3.1	Exemples des treillis distributifs fermés	31
3.2	Exemples des espaces de Priestley	35
3.3	Conclusion	40

Introduction

En 1937 Stone donna une dualité des treillis distributifs fermés en topologisant X l'ensemble des Idéaux de A (A treillis distributif fermé), en prenant $\{I_a : a \in A\}$ l'ensemble de tous les Idéaux de A contenant a comme une base de topologie de l'espace dual de A .

En 1971, H.A.Priestley a développé une nouvelle dualité pour les treillis distributifs fermés en remplaçant $\{I_a : a \in A\}$ des Idéaux par $\{F_a : a \in A\}$ où F_a est l'ensemble des $\{0-1\}$ homomorphismes du treillis A dans la chaîne $\{0,1\}$ non identiquement nuls qui prennent 1 en a .

Le but de ce travail est l'étude des treillis distributifs fermés (avec un plus grand élément et un plus petit élément).

Ce mémoire est organisé de la manière suivante:

- Le premier chapitre est constitué des définitions et des concepts de base, à ce niveau, nous rappelons les notions et les outils de base de la théorie des relations et des ensembles ordonnés et des treillis, et donnons le théorème de représentation de Stone, nous présentons les concepts et les vocabulaires permettant de définir et représenter un graphe et un ensemble ordonnés en proposons pour chacun un exemple illustratif.

- Le deuxième chapitre nous avons donné la définition d'espace ordonné et l'espace de Priestley, et nous avons démontré que l'espace dual d'un treillis distributif fermé est un espace de Priestley, et le dual d'un espace de Priestley est un treillis distributif fermé.

- Le troisième chapitre nous avons donné quelques exemples, à partir de ces exemples nous avons illustré les théorèmes de deuxième chapitre.

Chapitre 1

Ensembles ordonnés et treillis

Nous avons donné des définitions et des concepts de base, à ce niveau, nous rappelons les notions et les outils de base de la théorie des relations et des ensembles ordonnés et des treillis, et donnons le théorème de représentation de Stone, nous présentons les concepts et les vocabulaires permettant de définir et représenter un graphe et un ensemble ordonnés en proposons pour chacun un exemple illustratif.

Contenu:

1. Ensembles ordonnés,
2. Treillis,
3. Homomorphismes et isomorphismes,
4. Théorème de représentation de Stone des treillis distributifs,
5. Représentation des treillis distributifs.

1.1 Ensembles ordonnés

1.1.1 Définitions et notations

Définition 1.1.1 [7](Produit cartésien)

Le produit cartésien de deux ensembles A et B est défini par :

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$$

Une relation binaire sur un ensemble non vide X est une partie R de l'ensemble $X \times X$. La notation $(x, y) \in R$, (ou xRy) signifie que x est en relation avec y , ou encore que x est lié à y moyennant la relation R . On écrit $(x, y) \in R$ (ou $x \neg Ry$) dans le cas contraire.

Notation 1.1.1 :

• Soit R est une relation binaire sur un ensemble X . On note par :

1. $\Delta_X := \{(x, x), x \in X\}$;
2. $\bar{R} = \{(x, y) \in X \times X / (x, y) \notin R\}$, (i.e. $\bar{R} = C_{X \times X} R$);
3. $R^{-1} = \{(y, x) \in X \times X / (x, y) \in R\}$;
4. $R^0 = \Delta_X, R^1 = R$.

Opérations sur les relations binaires :

Soit A, B et C trois ensembles:

1. L'union des relations :

$T = R \cup S$, est dit l'union de R et S si $(x, y) \in R$ ou $(x, y) \in S$, alors $(x, y) \in T$.

2. L'intersection des relations :

$T = R \cap S$, est dit l'intersection de R et S si $(x, y) \in R$ et $(x, y) \in S$, alors $(x, y) \in T$.

3. Complément d'une relation :

$A \times B$ représente toutes les relations possibles qui peuvent se trouver entre deux ensembles :

$$R^c = \overline{R} = \{(x, y) \in A \times B \mid (x, y) \notin R\}.$$

\overline{R} est dite le complément de la relation R .

4. Relation inverse :

Soit R une relation de A à B . Son inverse R^{-1} est définie par :

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R : x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

5. Composition :

Soient A, B et C trois ensembles, et soient R et S deux relations telles que :

$$R \subseteq A \times B \text{ et } S \subseteq B \times C,$$

La relation $T = S \circ R \subseteq A \times C$ définie par :

Si $a \in A$ et $c \in C$, alors aTc si et seulement si il existe au moins un élément $b \in B$, tel que aRb et bSc .

Exemple 1.1.1 Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $S = \{(1, 4), (1, 3), (2, 3), (3, 1), (4, 1)\}$,

$$R = \{(1, 2), (1, 1), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$$

Cherchons $S \circ R$

On a $(1, 2) \in R$ et $(2, 3) \in S$ donc $(1, 3) \in S \circ R$

Et pour l'autre :

$$\bullet (1, 1) \in R \text{ et } (1, 4) \in S \implies (1, 4) \in S \circ R.$$

$$\bullet (1, 1) \in R \text{ et } (1, 3) \in S \implies (1, 3) \in S \circ R.$$

$$\bullet (1, 3) \in R \text{ et } (3, 1) \in S \implies (1, 1) \in S \circ R.$$

$$\bullet (2, 4) \in R \text{ et } (4, 1) \in S \implies (2, 1) \in S \circ R.$$

$$\bullet (3, 2) \in R \text{ et } (2, 3) \in S \implies (3, 3) \in S \circ R.$$

$$\implies S \circ R = \{(1, 3), (1, 4), (1, 1), (2, 1), (3, 3)\}.$$

1.1.2 Propriétés d'une relation

Une relation binaire R sur un ensemble X est :

1. Réflexive si xRx pour tout $x \in X$.
2. Irréflexive si $x \neg Rx$ pour tout $x \in X$.
3. Symétrique si xRy implique yRx pour tout $x, y \in X$.
4. Antisymétrique si xRy et yRx impliquent $x = y$ pour tout $x, y \in X$.
5. Totale si $x \neq y$ implique xRy ou yRx pour tout $x, y \in X$.
6. Transitive si xRy et yRz impliquent xRz pour tout $x, y, z \in X$.

En termes ensemblistes, les conditions ci-dessus se traduisent respectivement par : R est

- (1') Réflexive si, $\Delta_X \subseteq R$.
- (2') Irréflexive si, $\Delta_X \cap R = \emptyset$.
- (3') Symétrique si, $R \subseteq R^{-1}$.
- (4') Antisymétrique si, $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_X$.
- (5') Totale si, $R \cup R^{-1} \cup \Delta_X = X \times X$.
- (6') Transitive si, $R \circ R \subseteq R$.

En effet

- (1') Si $(x, x) \in \Delta_X \implies xRx \implies (x, x) \in R$ pour tout $x \in X$.
- (2') $x \neg Rx \implies x \notin \Delta_X$, pour tout $x \in X \implies \Delta_X \cap R = \emptyset$.
- (3') Si $(xRy \implies yRx)$, alors $xR^{-1}y$, donc $R \subseteq R^{-1}$.
- (4') Si xRy et yRx impliquent $(x, y) \in \Delta_X$, $\implies x = y$.

(5') Si $R \cup R^{-1} \cup \Delta_X = X \times X$ pour tout $(x, y) \in X \times X$, si $x \neq y \implies xRy$ ou yRx donc R est total.

(6') Si $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in R$ impliquent $R(x, y) \circ R(y, z) = R(x, z)$, donc $(x, z) \in R$ pour tout $x, y, z \in X$, donc R est transitive.

Définition 1.1.2 [1] Une relation binaire O sur un ensemble X est un ordre sur X si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

1. **Réflexivité;**
2. **Antisymétrie;**
3. **Transitivité.**

L'ordre O est dit **total** s'il est tel que, pour tous $x, y \in X$, $x \neg Oy$ implique yOx .

Un **ensemble ordonné** est un couple $P = (X, O)$ où X est un ensemble et O un ordre sur X (Dans certains cas et pour éviter toute ambiguïté, il pourra être utile de noter O_p l'ordre de l'ensemble ordonné P). Si O est un ordre total, $P = (X, O)$ est alors appelé un ensemble totalement ordonné (ou ensemble linéairement ordonné ou une chaîne). Les symboles C_n et \underline{n} désigneront une chaîne à n éléments.

Définition 1.1.3 Soit O une relation sur un ensemble X .

- O est un **ordre strict** si elle est irréflexive (pour tout $x \in X$, $x \neg Ox$) et transitive.

Un ensemble strictement ordonné est un couple $P = (X, O)$ où X est un ensemble et O un ordre strict sur X .

- L'ordre strict O est dit strictement total s'il est tel que $x \neq y$ et $x \neg Oy$ impliquent yOx . On dit alors que P est un ensemble strictement totalement ordonné. Si $|X| = n$, P ou l'ordre strict correspondant pourra être noté \underline{n}_s .

- On dit que R est une relation d'**équivalence** si R est réflexive, symétrique et transitive.

Le plus souvent on désigne un ordre strict O par le symbole $<$, on note $x < y$ et on lit " x strictement inférieur à y " le fait que $(x, y) \in O$, on note $x \not< y$ le fait contraire.

Définition 1.1.4 [1]

La relation de couverture d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$, notée \prec_P ou simplement \prec , est définie par $x \prec y$ si $(x < y \text{ et } x \leq z < y)$ impliquent $x = z$. On dit alors que x est couvert par y ou que y couvre x . On pose $xP^+ = \{t \in P : x \prec t\}$ et $P^-x = \{t \in P : t \prec x\}$.

Autrement dit, x est couvert par y dans P si $x < y$ et il n'existe pas dans P d'élément z supérieur à x et inférieur à y .

Définition 1.1.5 Une **Chaînes** est un ensemble ordonné dont les éléments sont deux à deux comparables

Définition 1.1.6 On appelle **antichaînes** tout ensemble ordonné dans lequel deux éléments (distincts) sont toujours incomparables. Le symbole A_n désignera une antichaîne à n éléments.

-Une chaîne (resp antichaîne) est dite **maximale** si elle n'est pas strictement incluse dans une autre chaîne (resp antichaîne).

Définition 1.1.7 [1]

Le diagramme (ou diagramme de Hasse) d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ est une représentation de son graphe de couverture dans laquelle les éléments x de P sont représentés par des points $p(x)$ du plan, de telle sorte que les deux règles suivantes soient respectées :

1. Si $x < y$, (l'horizontale passant par) $p(x)$ est au dessous de (l'horizontale passant par) $p(y)$,
2. $p(x)$ et $p(y)$ sont joints par un segment de droite si et seulement si $x \prec y$.

Exemple 1.1.2 Le diagramme de Hasse de l'ensemble des parties d'un ensemble à trois éléments:

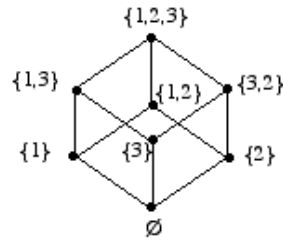


Figure 1.1.1 : Le diagramme de hasse de l'ensemble des parties d'un ensemble a trois éléments.

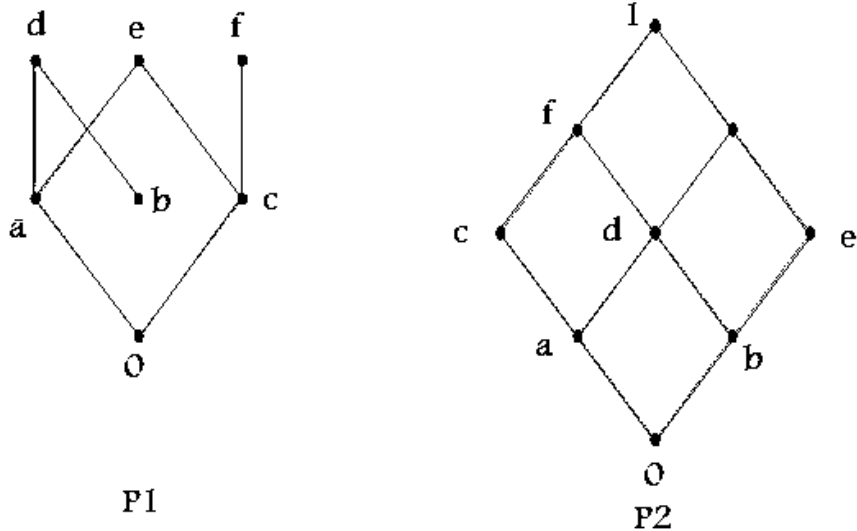
1.1.3 Infimums, supremums

Définition 1.1.8 [1]

Un élément x d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ est :

- Le minimum de P si $x \leq y$ pour tout $y \in P$,
- Le maximum de P si $y \leq x$ pour tout $y \in P$,
- Un élément minimal de P s'il n'existe pas $y \in P$ avec $y < x$,
- Un élément maximal de P s'il n'existe pas $y \in P$ avec $x < y$.

Exemple 1.1.3 Soient (P_1, \leq) et (P_2, \leq) deux ensembles ordonnés, et le diagramme de P_1 et P_2 donné comme suite:



P_1 et P_2

Les éléments minimaux de P_1 sont $\{0\}$.

Le minimum de P_1 est $\{0\}$.

Les éléments maximaux de P_1 sont $\{d, e, f\}$.

Le maximum de P_1 n'existe pas.

Les éléments minimaux de P_2 sont $\{0\}$.

Le minimum de P_2 est $\{0\}$.

Les éléments maximaux de P_2 sont $\{1\}$.

Le maximum de P_1 est $\{1\}$.

-Au lieu du minimum (respectivement, maximum), on parle aussi du plus petit élément (respectivement, du plus grand élément) de P . Ces éléments nécessairement uniques lorsqu'ils existent, sont souvent notés respectivement 0_P et 1_P (ou simplement 0 et 1) et on dit alors que P est borné.

-L'ensemble des éléments minimaux (respectivement, maximaux) de P est noté $MinP$ (respectivement, $MaxP$).

-Si Y est une partie de $P = (X, \leq)$, un **minorant** (respectivement, un **majorant**) de Y est un élément m de P tel que $m \leq x$ (respectivement, $m \geq x$) pour tout $x \in Y$. La partie Y est dite **minorée** (respectivement, **majorée**) si elle admet au moins un minorant (respectivement, un majorant).

Etant donnée une partie Y de P , on note $MinoY$ l'ensemble des minorants de Y et $MajoY$ celui de ses majorants.

Définition 1.1.9 [1]

Soit Y une partie d'un ensemble ordonné P . On dit que $r \in P$ est l'infimum de Y (ou sa borne inférieure) si Y est minorée et si l'ensemble de ses minorants admet r pour maximum. On le note $\inf Y$ ou $\bigwedge Y$. De même, Y a un supremum (ou une borne supérieure) t si Y est majorée et si l'ensemble de ses majorants admet t pour minimum. On le note $\sup Y$ ou $\bigvee Y$.

1.1.4 Parties commençantes, parties finissantes

Définition 1.1.10 *Soit $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné. Une partie C de P est une partie commençante si, pour tous $t \in P$ et $y \in C$, $t \leq y$ implique $t \in C$. Une partie F de P est une partie finissante si, pour tous $t \in P$ et $y \in F$, $y \leq t$ implique $t \in F$.*

On note $C(P)$ (respectivement, $F(P)$) l'ensemble des parties commençantes (respectivement, finissantes) de P . Une partie commençante (respectivement, finissante) de P et différente de \emptyset ou de P est appelée une partie commençante (respectivement, finissante) propre.

La section commençante de base x est la partie commençante $(x]$ formée des minorants de x . Duale, la section finissante de base x est la partie finissante $[x)$ formée des majorants de x .

- L'union et l'intersection de parties commençantes (respectivement, finissantes) sont des parties commençantes (respectivement, finissantes),
- Toute partie commençante (respectivement, finissante) est union de sections commençantes (respectivement, finissantes),
- Le complémentaire dans un ensemble ordonné P d'une partie commençante (respectivement, finissante) est une partie finissante (respectivement, commençante).

1.1.5 Produit direct

Pour des ensembles ordonnés $P_1 = (X_1, \leq_{P_1}), \dots, P_n = (X_n, \leq_{P_n})$, on appelle **produit direct** des P_i et l'on note

$$P = \Pi_{1 \leq i \leq n} P_i$$

L'ensemble ordonné $P = (X, \leq_P)$ défini par :

$$X = \Pi_{1 \leq i \leq n} X_i$$

et

$$(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \leq_P (x'_1, \dots, x'_i, \dots, x'_n) \iff \forall i = 1, \dots, n, x_i \leq_{P_i} x'_i$$

1.1.6 Applications croissantes

Soient P et Q deux ensembles ordonnés. Une application croissante de P dans Q est toute application f de $V(P)$ dans $V(Q)$ telle que pour tout $x, y \in P$:

$$x \leq y \text{ dans } P \text{ implique } f(x) \leq f(y) \text{ dans } Q.$$

On désigne par $\text{Hom}(P, Q)$ l'ensemble des applications croissantes f de P dans Q .

1.2 Treillis

Définition 1.2.1 *Un ensemble ordonné P est un **inf-demi-treillis** si toute paire $\{x, y\}$ de ses éléments admet un infimum $x \wedge y$. C'est un **sup-demi-treillis** si toute paire $\{x, y\}$ de ses éléments admet un supremum $x \vee y$. C'est un **treillis** si toute paire de ses éléments admet un infimum et un supremum, donc s'il est à la fois inf-demi-treillis et sup-demi-treillis.*

Un treillis sera souvent noté $T = (X, \leq, \wedge, \vee)$ et le terme « demi-treillis » pourra désigner un inf-demi-treillis ou un sup-demi-treillis selon le contexte.

Définition 1.2.2 *Soit $D = (X, \leq, \wedge)$ un inf-demi-treillis. Une partie A de X est un **sous-inf-demi-treillis** de D si elle est inf-fermée, c'est-à-dire si $x, y \in A$ implique $x \wedge y \in A$.*

–Un élément x d'un treillis est appelé **sup irréductible** si $a \vee b = x$ implique $a = x$ ou $b = x$, ou encore x ne peut s'écrire comme le supremum de deux éléments.

–Un élément x est un sup irréductible si est seulement s'il couvre un seul élément dans le graphe de couverture associé à T .

–Un élément x d'un treillis est appelé **inf irréductible** si $a \wedge b = x$ implique $a = x$ ou $b = x$, ou encore x ne peut s'écrire comme l'infimum de deux éléments.

–Un élément x est un inf irréductible si est seulement s'il couvre un seul élément dans le graphe de couverture associé à T .

1.2.1 Quelques exemples de treillis

- Toute chaîne est treillis.

$$x, y \in C : \begin{cases} x \vee y = \max(x, y) \\ x \wedge y = \min(x, y) \end{cases}$$

- $E \neq \emptyset, (P(E), \subseteq, \wedge, \vee)$ est un treillis

$$X, Y \in (P(E) : \begin{cases} X \vee Y = X \cup Y \\ X \wedge Y = X \cap Y \end{cases}$$

- $(\mathbb{N}^*, \setminus, \vee, \wedge)$ est un treillis avec

$$x, y \in \mathbb{N}^* : \begin{cases} x \vee y = \text{ppcm}(x, y) \\ x \wedge y = \text{pgcd}(x, y) \end{cases}$$

Proposition 1.2.1 Dans un treillis quelconque:

1. $x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x \vee y = y \\ x \wedge y = x \end{cases}$
2. **Commutativité:** $a \vee b = b \vee a$ et $a \wedge b = b \wedge a$.
3. **Associativité:** $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ et $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$.
4. **Idempotence:** $a \vee a = a$ et $a \wedge a = a$.
5. **Absorption:** $a \vee (a \wedge b) = a$ et $a \wedge (a \vee b) = a$.

1.2.2 Structures algébriques

Treillis fermés:

Définition 1.2.3 Un treillis est **fermé** s'il possède un plus petit élément noté (0) et un plus grand élément noté (1)

Exemple 1.2.1 1. Le treillis $D(30)$ l'ensemble des diviseurs de 30 est fermé $(0) = 1, (1) = 30$.

2. $(P(E), \subseteq, \cap, \cup)$ fermé $(0) = \phi, (1) = E$.

Filtres:

On appelle **filtre** (noté F) dans un treillis tout partie non vide vérifiant:

$$\begin{cases} x \in F, y \geq x \Rightarrow y \in F \\ \text{et} \\ x \in F, y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F \end{cases}$$

- F est un filtre **propre** si $F \neq T$.
- F est un filtre **impropre** si $F = T$.
- Un **ultrafiltre** est un filtre maximal pour l'ordre d'inclusion entre filtres propres.
- Un filtre propre F est dit **premier** si:

$$x \vee y \in I \implies x \in I \text{ ou } y \in I$$

1. Soit 1 le plus grand élément de T alors l'ensemble $\{1\}$ est filtre de T , C'est le plus petit filtre de T .
2. F filtre propre $\iff 0 \notin F$.
3. Toute intersection des filtres propres est un filtre propre.

Filtre engendré :

On appelle **filtre engendré** par G ($G \in T, G \neq \phi$) noté F_G

$F_G = \cap \{\text{filtre qui contient } G\}$, Si le plus petit filtre qui contient G .

-Si $G = \phi$ alors $F_G = \{1\}$.

Filtre principale:

$F_{\{a\}} = F_a$ est un filtre engendré par un singleton a .

$$F_a = \{x \in T \mid x \geq a\} = T \vee a$$

G partie \wedge - compatible si F_G est propre i.e : $F_G \neq T$

Si G est \wedge - incompatible il existe un nombre fini a_1, a_2, \dots, a_n d'élément de G / $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = 0$ i.e : $F_G = T$.

Il existe des filtre propres maximaux pour l'inclusion ce sont les ultrafiltres

Proposition 1.2.2 *Tout filtre propre est inclus dans ultrafiltre*

Exemple 1.2.2 $D(30)$

Les filtres propres sont $\{\{2, 6, 10, 30\}, \{10, 30\}, \{6, 30\}, \{5, 10, 15, 30\}, \{15, 30\}, \{3, 6, 15, 30\}, \{30\}\}$

Les ultrafiltre sont $\{\{2, 6, 10, 30\}, \{5, 10, 15, 30\}, \{3, 6, 15, 30\}\}$ on constate que tout les filtres propres sont inclus dans des ultrafiltres.

Caractérisation d'un ultrafiltre dans un treillis

Proposition 1.2.3 *Soit F un filtre propre alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. F est un ultrafiltre;
2. $x \notin F$, il existe $y \in F$ $/ x \wedge y = 0$.

Preuve. $a \implies b$) F ultrafiltre (propre)

Suppose qu'il existe $x \in F$ $/ \forall y \in F, x \wedge y \neq 0$.

on considère $G = F \cup \{x\}$ et montre que G est \wedge -compatible

Soit $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in G$ on a $a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge \dots \wedge a_n \neq 0$ si $a_i \in F$

Donc $a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge \dots \wedge a_n \wedge x = y \wedge x \neq 0$ (car $a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge \dots \wedge a_n \in F$)

Donc G est une partie \wedge -compatible, F_G est propre et contient F ce qui contredit la maximalité de F .

$b \implies a$) si on a (b) i.e $x \notin F$, il existe $y \in F$ $/ x \wedge y = 0$.

Suppose qu'il existe un filtre propre F' tel que $F \subsetneq F'$ alors il existe $x \in F'$ et $x \notin F$

$x \notin F \xRightarrow{(b)}$ il existe $y \in F$ $/ x \wedge y = 0 \implies y \in F'$ et $x \in F'$ mais $x \wedge y = 0$ ce qui contredit que F' est un filtre propre. Donc il n'existe aucun filtre propre F' qui contient F pour conséquent F est maximal. ■

idéaux:

Soit T un treillis fermé, on appelle idéal (noté I) toute partie non vide de T tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in I, y \leq x \implies y \in I \\ \text{et} \\ x, y \in I \implies x \vee y \in I \end{array} \right.$$

- I idéal propre $\iff I \neq T \iff 1 \notin I$.
- Le singleton $\{0\}$ est le plus petit idéal de T .
- Un idéal propre I est dit **premier** si:

$$x \wedge y \in I \implies x \in I \text{ ou } y \in I.$$

idéal engendré par une partie G :

On appelle **idéal engendré** par G ($G \in T, G \neq \emptyset$) (noté I_G)

$$I_G = \{x \in T \mid x \leq a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n, a_i \in G\}$$

-Si $G = \emptyset$ alors $I_\emptyset = 0$.

- G partie \vee – compatible si I_G est propre i.e : $I_G \neq T$.

- G partie \vee – incompatible $\iff \exists (a_i)_{i=1,n}; a_i \in G \mid a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n = 1$.

idéal maximale:

L'ensemble des idéaux propres est inductif, il admet donc un élément maximal.

1.2.3 Treillis distributifs

Définition 1.2.4 Un treillis est distributif si $\forall a, b, c \in T \iff$

$$\begin{cases} a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\ a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \end{cases}$$

C'est à dire, qu'un treillis est distributif si et seulement si on a la distributivité de l'opération \wedge par rapport à l'opération \vee et inversement.

1. $(P(E), \subseteq, \cup, \cap)$ est un treillis distributif.
2. Toute chaîne est un treillis distributif.

Remarque 1.2.1 Avec cinq éléments distincts formant un ensemble ordonné. Les seuls treillis distributifs sont:

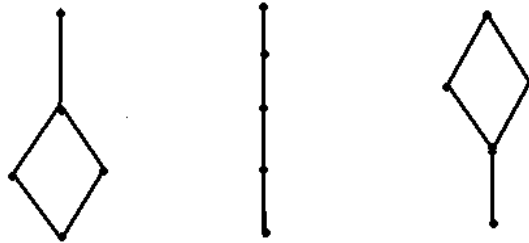


Figure 1.2.1 : Treillis distributif à cinq éléments.

Remarque 1.2.2 Les treillis M_3 et N_5 ne sont pas distributifs.

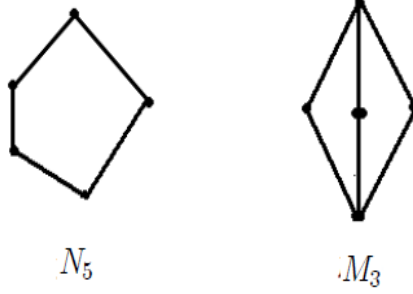


Figure 1.2.2 : Les treillis N_5 et M_3

Proposition 1.2.4 Le produit direct de deux treillis distributifs est un treillis distributif.

Preuve. Soient (A, \leq) et (B, \leq) deux treillis distributifs, et soient $x, x', z \in A$ et $y, y', z' \in B$.

a) On démontre que

$$\begin{cases} (x, y) \wedge (x', y') = (x \wedge x', y \wedge y') \\ (x, y) \vee (x', y') = (x \vee x', y \vee y') \end{cases}$$

On a $x \wedge x' \leq x$ et $y \wedge y' \leq y \implies (x \wedge x', y \wedge y') \leq (x, y)$, et $x \wedge x' \leq x'$ et $y \wedge y' \leq y' \implies (x \wedge x', y \wedge y') \leq (x', y')$

Donc $(x \wedge x', y \wedge y') \leq (x, y) \wedge (x', y') \dots (1)$

Soit $(z, z') \leq (x, y) \wedge (x', y') \implies (z, z') \leq (x, y)$ et $(z, z') \leq (x', y')$ on a $z \leq x$ et $z \leq x' \implies z \leq x \wedge x'$

et on a $z' \leq y$ et $z' \leq y' \implies z' \leq y \wedge y'$ donc $(z, z') \leq (x \wedge x', y \wedge y')$.

Si $(z, z') \leq (x, y) \wedge (x', y') \implies (z, z') \leq (x \wedge x', y \wedge y')$ donc $(x, y) \wedge (x', y') \leq (x \wedge x', y \wedge y') \dots (2)$

de (1) et (2) on a $(x, y) \wedge (x', y') = (x \wedge x', y \wedge y')$.

On a $x \leq x \vee x'$ et $y \leq y \vee y' \implies (x, y) \leq (x \vee x', y \vee y')$, et $x' \leq x \vee x'$ et $y' \leq y \vee y' \implies (x', y') \leq (x \vee x', y \vee y')$

donc $(x, y) \vee (x', y') \leq (x \vee x', y \vee y') \dots (1')$.

Soit $(x, y) \vee (x', y') \leq (z, z') \implies (x, y) \leq (z, z')$ et $(x', y') \leq (z, z') \implies x \leq z$ et $x' \leq z \implies x \vee x' \leq z$

Et $y \leq z'$ et $y' \leq z' \implies y \vee y' \leq z'$ donc $(x \vee x', y \vee y') \leq (z, z')$

donc $(x \vee x', y \vee y') \leq (x, y) \wedge (x', y') \dots (2')$

De (1') et (2') on a $(x \vee x', y \vee y') = (x, y) \wedge (x', y')$

b) la distributivité:

$$\begin{aligned} (x, y) \vee [(x', y') \wedge (z, z')] &= (x, y) \vee (x' \wedge z, y' \wedge z') = (x \vee (x' \wedge z), y \vee (y' \wedge z')) \\ &= ((x \vee x') \wedge (x \vee z), (y \vee y') \wedge (y \vee z')) = (x \vee x', y \vee y') \wedge (x \vee z, y \vee z') \\ &= [(x, y) \vee (x', y')] \wedge [(x, y) \vee (z, z')] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Théorème 1.2.1 Dans un treillis distributif si $\begin{cases} x \vee z = y \vee z \\ \text{et} \\ x \wedge z = y \wedge z \end{cases}$ alors $x = y$.

Preuve. $x = x \vee (x \wedge z) = x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) = y \vee (x \wedge z) = y \vee (y \wedge z) = y$.

Donc $x = y$ ■

1.2.4 Treillis complémentés

Un treillis complémenté est un treillis fermé T tel que pour chaque $x \in T$ il existe au moins $x' \in T$ tel que

$$\begin{cases} x \vee x' = 1 \\ x \wedge x' = 0 \end{cases}$$

- x' est dit complément de x .

- Dans un treillis distributif le complément s'il existe est unique.

En effet $\begin{cases} x \vee x' = x \vee x'' = 1 \\ x \wedge x' = x \wedge x'' = 0 \end{cases}$ donc $x' = x''$.

Exemple 1.2.3 1. $(P(E), \subseteq, \cap, \cup)$ est complémenté.

2. La chaîne $\{0, 1\}$ est la seule chaîne qui soit distributif complémenté.

3. $D(6)$, l'ensemble des diviseurs de 6 et $D(30)$. l'ensemble des diviseurs de 30 sont des treillis complémentés.

1.2.5 Treillis de Boole

Définition 1.2.5 *Un treillis de boole est un treillis fermés distributif et complémenté.*

Exemple 1.2.4 1. $(P(E), \subseteq, \cap, \cup)$ est treillis de boole.

2. La chaîne $\{0, 1\}$ est un treillis de boole.

3. $D(6), D(30)$ sont des treillis de boole.

Proposition 1.2.5 1. Dans un treillis de boole $\neg 0 = 1, \neg 1 = 0$

2. $\neg \neg x = x$

3. $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y, \neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y.$

Preuve. 1) On suppose que $\neg 0 = x$

$$\begin{cases} x \wedge 0 = 0 = 0 \wedge 1 \\ x \vee 0 = 1 = 0 \vee 1 \end{cases} \implies x = 1$$

On suppose que $\neg 1 = y$

$$y \wedge 1 = y = 0 \implies y = 0$$

2)

$$\begin{cases} \neg \neg x \vee \neg x = 1 = \neg x \vee x \\ \neg \neg x \wedge \neg x = 0 = \neg x \wedge x \end{cases} \implies \neg \neg x = x$$

$$\begin{aligned} 3) (x \wedge y) \wedge (\neg x \vee \neg y) &= [(x \wedge y) \wedge \neg x] \vee [(x \wedge y) \wedge \neg y] \\ &= [(y \wedge x) \wedge \neg x] \vee [x \wedge (y \wedge \neg y)] \\ &= [y \wedge (x \wedge \neg x)] \vee (x \wedge 0) \\ &= 0 \vee 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x \wedge y) \vee (\neg x \vee \neg y) &= [(\neg x \vee \neg y) \vee x] \wedge [(\neg x \vee \neg y) \vee y] \\ &= 1 \wedge 1 = 1. \end{aligned}$$

Même raisonnement pour $\neg(x \vee y)$. ■

Définition 1.2.6 *Un anneau booléen est un anneau $(R, +, \cdot, 0, 1)$ unitaire dont la multiplication est idempotente ($x \cdot x = x$).*

Proposition 1.2.6 *Tout treillis de Boole est un anneau booléen pour les lois :*

$$- x \cdot y = x \wedge y$$

- $\neg x = x + 1$
- $x \vee y = x + y + xy$

1.2.6 Algèbres de Boole

Pour un ensemble possédant deux opérations \wedge et \vee qui sont commutatives, associatives, idempotentes et vérifiant les lois d'absorption, il existe une relation d'ordre unique \leq telle que $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$ ou $x \vee y = y$ et (L, \leq, \vee, \wedge) est un treillis.

Ces opérations étant distributives, si chaque élément possède un complément, (L, \leq, \vee, \wedge) est une algèbre de Boole.

Remarque 1.2.3 *Toute algèbre de Boole est un treillis de Boole.*

Exemple 1.2.5 *E ensemble quelconque, il est équivalent de définir :*

1. *Une structure de treillis de Boole $(E, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$.*
2. *Une structure d'anneau Booléen $(E, +, \cdot, 0, 1)$.*

$$x \leq y \iff \begin{cases} x \wedge y = x. \\ x \vee y = y. \end{cases}$$

1.3 Homomorphismes et isomorphismes

Définition 1.3.1 [1]

Deux ensembles ordonnés $P = (X, \leq_P)$ et $Q = (Y, \leq_Q)$ sont dits isomorphes (ou de même type) s'il existe une bijection f de X sur Y vérifiant :

$$x \leq_P y \iff f(x) \leq_Q f(y)$$

La bijection f est appelée un isomorphisme (d'ordre) entre P et Q et on écrit $P \equiv Q$ (dans le cas où $P = Q$, on dit que f est un automorphisme de P).

Définition 1.3.2 Soit $L = (X, \leq)$ et $M = (Y, \leq)$ deux treillis, $f : X \longrightarrow Y$ une application. f est un homomorphisme de treillis si pour tous $a, b \in X$, on a :

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b);$$

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b).$$

- Un homomorphisme bijectif est dit isomorphisme.

- Un homomorphisme de treillis $f : L \rightarrow M$ de treillis fermé vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ est appelé $\{0, 1\}$ -homomorphisme

Proposition 1.3.1 Soient $L = (X, \leq)$ et $M = (Y, \leq)$ deux treillis, $f : X \rightarrow Y$ une application. Il y a équivalence entre:

- a. f est croissante ;
- b. $\forall a, b \quad f(a \vee b) \geq f(a) \vee f(b)$;
- c. $\forall a, b \quad f(a \wedge b) \leq f(a) \wedge f(b)$.

et d'autre part

f est un isomorphisme de treillis si et seulement si f est un isomorphisme d'ordre.

Preuve. 1) $a \implies b$ $x \leq x \vee y \implies f(x) \leq f(x \vee y)$ et $y \leq x \vee y \implies f(y) \leq f(x \vee y)$.

D'où $f(x) \vee f(y) \leq f(x \vee y)$.

$b \implies a$ $x \leq y \implies x \vee y = y \implies f(y) = f(x \vee y) \geq f(x) \vee f(y) \implies f(x) \leq f(y)$,

Donc $a \Leftrightarrow b$.

$a \Leftrightarrow c$ en considérant l'ordre dual.

2) Supposons f un isomorphisme de treillis. f est donc bijectif, et croissant car :

$$x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y \Leftrightarrow f(x \vee y) = f(y) \Leftrightarrow f(x) \vee f(y) = f(y) \Leftrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Réciproquement, supposons que f soit un isomorphisme d'ordres. Par (1) et par dualité, il suffit de montrer que $\forall x, y$ on a $f(x \vee y) \leq f(x) \vee f(y)$. Puisque f est surjective, soit $z \in Y : z = f(x) \vee f(y)$ alors il existe $t \in X : f(t) = f(x) \vee f(y)$. On a $f(x) \leq z$ et $f(y) \leq z$ d'où $x \leq t$ et $y \leq t$ (f isomorphisme d'ordres) d'où $x \vee y \leq t$.

f croissante implique $f(x \vee y) \leq f(t) = f(x) \vee f(y)$,

et soit $m \in Y : m = f(x) \wedge f(y)$, f est surjectif donc il existe $n \in X : f(n) = m$,

on a $m \leq f(x)$ et $m \leq f(y) \implies n \leq x$ et $n \leq y \implies n \leq x \wedge y \implies f(n) \leq f(x \wedge y) \implies f(x) \wedge f(y) \leq f(x \wedge y)$. ■

Définition 1.3.3 Soit X un ensemble non vide A une partie de X , on définit la fonction caractéristique de A , notée χ_A par :

$$\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$$

$$x \mapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A; \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Proposition 1.3.2 La fonction caractéristique d'un filtre premier est un homomorphisme de treillis.

Preuve. Soit T un treillis et soient $x, y \in F \subseteq T$ (F filtre premier) on a:

$\chi_F(x)$	$\chi_F(y)$	$\chi_F(x \vee y)$	$\chi_F(x) \vee \chi_F(y)$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Donc $\chi_F(x \vee y) = \chi_F(x) \vee \chi_F(y)$.

Et

$\chi_F(x)$	$\chi_F(y)$	$\chi_F(x \wedge y)$	$\chi_F(x) \wedge \chi_F(y)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Donc $\chi_F(x \wedge y) = \chi_F(x) \wedge \chi_F(y)$

Donc la fonction caractéristique d'un filtre premier est un homomorphisme de treillis.

■

1.4 Théorème de représentation de Stone des treillis distributifs

Théorème 1.4.1 Tout treillis distributif est isomorphe à une famille de parties d'un ensemble ordonnée par l'inclusion close par intersection et union finies.

Preuve. Soit l'application:

$$f : P \rightarrow F : F = \{\downarrow x / x \in P\}$$

$$x \rightarrow \downarrow x$$

1) On a $f(x \vee y) = \downarrow (x \vee y) = (\downarrow x) \cup (\downarrow y) = f(x) \cup f(y)$ car:

– Si $z \in f(x) \cup f(y) \implies z \in (\downarrow x) \cup (\downarrow y) \implies z \in (\downarrow x)$ ou $z \in (\downarrow y) \implies z \leq x$ ou $z \leq y \implies z \leq x \vee y \implies z \in \downarrow (x \vee y) \implies z \in f(x \vee y) \implies f(x) \cup f(y) \subseteq f(x \vee y) \dots (1)$

– Si $t \in f(x \vee y) \implies t \leq x \vee y$ et suppose que $t \not\leq x$ et $t \not\leq y$

On a $t \wedge (x \vee y) = t$ et d'autre part $t \wedge (x \vee y) = (t \wedge x) \vee (t \wedge y) = t$ (contradiction) donc $t \leq x$ ou $t \leq y \implies t \in (\downarrow x) \cup (\downarrow y) \implies t \in f(x) \cup f(y) \implies f(x \vee y) \subseteq f(x) \cup f(y) \dots (2)$

De (1) et (2) on $f(x \vee y) = f(x) \cup f(y)$

et $f(x \wedge y) = \downarrow (x \wedge y) = (\downarrow x) \cap (\downarrow y) = f(x) \cap f(y)$ car si: $z \in f(x \wedge y) = \downarrow (x \wedge y) \iff z \leq x \wedge y \iff z \leq x$ et $z \leq y \iff$

$z \in \downarrow (x)$ et $z \in \downarrow (y) \iff z \in (\downarrow x) \cap (\downarrow y) = f(x) \cap f(y)$ (homomorphisme)

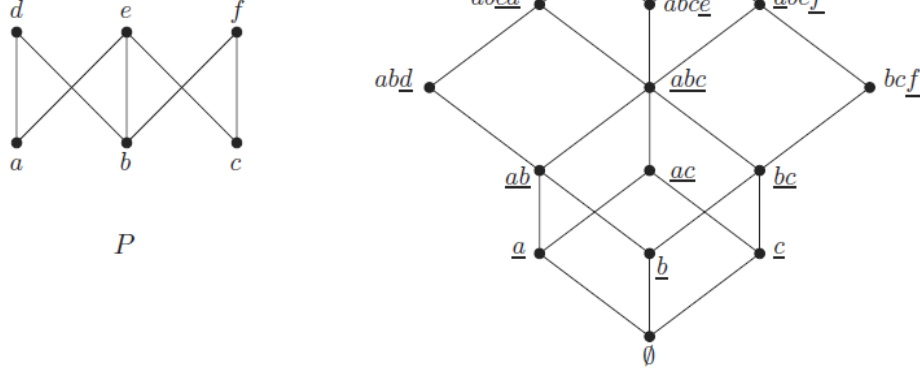
2) Suppose que $f(x) = f(y) \iff \downarrow x = \downarrow y$. On a $x \in \downarrow x \implies x \in \downarrow y \implies x \leq y$ et $y \in \downarrow y \implies y \in \downarrow x \implies y \leq x$, donc $x = y$ (injective)

3) Pour tout $z \in F : z = \downarrow x / x \in P$ donc $\forall z \in F, \exists x \in P : f(x) = z$ (surjectif)

De 1,2 et 3 on a l'isomorphisme ■

1.5 Représentation des treillis distributifs

Le treillis $C(P)$ des parties commençantes de P , et le treillis $F(P)$ de ses parties finissantes, sont des treillis distributifs associés à un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$



Un ensemble ordonné P et le treillis $C(P)$ de ses parties commençantes.

Nous énonçons maintenant le théorème fondamental de représentation des treillis distributifs dû à Stone. Rappelons que pour tout élément x d'un treillis T , $S_x = \{s \in S_T : s \leq x\}$.

Théorème 1.5.1 [1]

Soit T un treillis distributif. L'application $c : x \rightarrow c(x) = S_x$ est un isomorphisme entre T et le treillis $C(S_T)$ des parties commençantes de l'ensemble ordonné S_T des éléments sup-irréductibles de T . L'isomorphisme inverse entre $C(S_T)$ et T est l'application $C \rightarrow \bigvee C$.

Preuve. Considérons l'application c définie dans l'énoncé. Il est d'abord clair que S_x est une partie commençante de S_T et on sait que $x = \bigvee S_x$. De cette égalité, on déduit immédiatement que c est injective et que $x \leq y$ si et seulement si $S_x \subseteq S_y$. Pour une partie commençante C de S_T , posons $x = \bigvee C$. On a donc $C \subseteq S_x$. Soit s un sup-irréductible de T tel que $s \in S_x$. Puisque $s \leq x = \bigvee C$, il résulte que s est inférieur ou égal à un élément de la partie commençante C . Donc $s \in C$, $C = S_x$ et c est surjective, donc un isomorphisme. Finalement, les deux égalités $x = \bigvee S_x$ et $C = c(\bigvee C)$ ci dessus montrent la dernière assertion ■

Chapitre 2

Représentation des treillis distributifs

Nous avons donné la définition d'espace ordonné et l'espace de Priestley, et nous avons démontré que l'espace dual d'un treillis distributif fermé est un espace de Priestley, et le dual d'un espace de Priestley est un treillis distributif fermé.

Contenu:

1. Ensembles croissants,
2. Espaces ordonnés,
3. Espace totalement discontinu,
4. Espaces de Priestley,
5. Etude de la dualité topologique.

2.1 Ensembles croissants

Définition 2.1.1 Une topologie sur un ensemble X est une famille τ de parties de X vérifiant les conditions suivantes :

1. Soit $(A_i)_{i \in I}$, $A_i \in \tau$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.
2. A_j , $j = 1, \dots, n$. $A_j \in \tau$ entraîne $\bigcap_{j=1}^n A_j \in \tau$,
3. $\emptyset \in \tau$ et $X \in \tau$.

Définition 2.1.2 Soit (X, \leq) un ensemble ordonné, et soit E un sous ensemble de X . On dit que E est croissant si, $\forall x \in E$, on a $x \leq y \implies y \in E$:

On dit que E est décroissant si, $\forall x \in E$; on a : $y \leq x \implies y \in E$.

2.2 Espaces ordonnés

Définition 2.2.1 Un espace ordonné est un triplet (X, τ, \leq) où X est un ensemble non vide, τ une topologie sur X , \leq une relation d'ordre sur X .

2.3 Espace totalement discontinu

Définition 2.3.1 Soit (X, τ, \leq) un espace ordonné, on dit que (X, τ, \leq) est un espace totalement discontinu si $\forall x, y \in X$ tel que $x \not\leq y$, il existe un τ -of croissant U et un τ -of décroissant V tel que : $x \in U$, $y \in V$ avec $U \cap V = \emptyset$.

Remarque 2.3.1 Un τ -of est un ouvert et fermé à la fois.

2.4 Espaces de Priestley

Définition 2.4.1 [6]

Un espace ordonné (X, τ, \leq) est dit espace de Priestley s'il est compact et totalement discontinu.

- Soit A un treillis distributif fermé, alors son espace dual sera défini par $T(A) = (X, \tau, \leq)$, où X est l'ensemble des homomorphismes de A sur $\{0, 1\}$, est la topologie produit induite par celle de $\{0, 1\}^A$, et \leq est la relation d'ordre : $f \leq g$ si et seulement si $f(a) \leq g(a)$ pour tout $a \in A$.

- Si $\sigma = (X, \tau, \leq)$ est un espace de Priestley, alors son espace dual est défini par :

$L(\sigma) = \{Y/Y \subseteq X \text{ et } Y \text{ est un } \tau\text{-of croissant}\}$ est un treillis distributif par rapport à l'union et à l'intersection des sous ensembles dans X .

2.5 Etude de la dualité topologique

Soit X un espace topologique compact.

Lemme 2.5.1 [5]

Il ya équivalence entre :

- a) Pour tout $x \in X$ l'intersection des ofs contenant x est $\{x\}$,
- b) Si $x \neq y$; il existe un of V tel que : $x \in V$ et $y \notin V$,
- c) La topologie de X est engendré par les ofs (les ouverts de X sont reunion d'ofs).

On appelle espace Booléen tout espace topologique compact, vérifiant l'une des trois propriétés des lemme.

Théorème 2.5.1 [6]

- a) Si A est un treillis distributif alors $T(A) = (X, \tau, \leq)$ est un espace de priestley.
- b) Si $\sigma = (X, \tau, \leq)$ est un espace de priestley alors $L(\sigma)$ est un treillis distributif fermé.

Preuve. (a) Montrons que $T(A)$ est compact :

X étant l'ensemble de tous les homomorphismes de treillis de A sur $\{0, 1\}$, X est fermé dans la topologie induite par la topologie produit de $\{0, 1\}^A$ qui est compacte, donc X est bien compact.

Il reste à montrer que $T(A)$ est totalement discontinu.

Pour cela soient $f, g \in X$ tel que $g \not\leq f$ donc il existe au moins un $a \in A$ tel que $f(a) = 0$ et $g(a) = 1$.

L'ensemble $U = \{h \in X / h(a) = 1\}$ est un τ -of croissant contenant g et $X - U$ est un τ -of décroissant contenant f et $U \cap (X - U) = \emptyset$.

On voit donc que $T(A)$ est un espace de Priestley.

(b) La démonstration est directe. ■

Théorème 2.5.2 [3]

(a) Soit A un treillis distributif. L'application $F_A : A \rightarrow L(T(A))$ définie par :

$F_A(a) = \{f \in X / f(a) = 1\}$ est un isomorphisme de treillis.

(b) Si $\sigma = (X, \tau, \leq)$ est un espace de Priestley alors l'application $G_\sigma : \sigma \rightarrow T(L(\sigma))$ définie par :

$$G_\sigma(x)(Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Y \\ 0 & \text{si } x \notin Y \end{cases}$$

Pour tout $Y \in L(\sigma)$, est un isomorphisme d'espaces de Priestley.

(c) Si $f : A_1 \rightarrow A_2$ est un homomorphisme de treillis alors l'application $T(f) : T(A_2) \rightarrow T(A_1)$ définie par : $T(f)(g) = g \circ f$ est un homomorphisme d'espace de Priestley (c'est-à-dire une application continue et croissante).

(d) Si $h : X_1 \rightarrow X_2$ est un homomorphisme d'espace de Priestley alors l'application $L(h) : L(X_2) \rightarrow L(X_1)$ définie par :

$$L(h)(Y) = h^{-1}(Y) \text{ pour tout } Y \in L(X_2)$$

est un homomorphisme de treillis.

(e) Si de plus f et h sont définis comme dans (c) et (d) alors les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \xrightarrow{f} & A_2 & & \sigma_1 & \xrightarrow{h} & \sigma_2 \\ F_{A1} \downarrow & & \downarrow F_{A2} & & G_{\sigma1} \downarrow & & \downarrow G_{\sigma2} \\ L(T(A_1)) & \xrightarrow{L(T(f))} & L(T(A_2)) & & T(L(\sigma_1)) & \xrightarrow{T(L(h))} & T(L(\sigma_2)) \end{array}$$

sont commutatifs.

Preuve. (b) Soit $Y \in L(T(A))$ i.e. un τ -of croissant. Existe-t-il un $a \in A$ tel que $F_A(a) = Y$?

Il revient au même de dire que U est un τ -of croissant si et seulement si $U = F_A(a)$, $a \in A$.

Pour cela posons $\mathfrak{R} = \{F_A(a)/a \in A\}$, et $\mathcal{F} = \{X - F_A(a)/a \in A\}$.

Ces deux familles sont stables pour la réunion et l'intersection finies.

Soit U un τ -of croissant dans X , Montrons que $U \in \mathfrak{R}$.

Si $f \in U$ et $g \in X - U$ alors $f \not\leq g$, il s'ensuit qu'il existe deux ensembles disjoints $R(f, g)$ et $S(f, g)$ tel que $R(f, g) \in \mathfrak{R}$, $S(f, g) \in \mathcal{F}$ et $f \in R(f, g)$, $g \in S(f, g)$.

La compacité de l'ensemble $X - U$, nous permet de l'exprimer comme une union finie d'ensembles $S(f; g_i), g_i \in X - U$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Posons $R(f) = \bigcup_{0 \leq i \leq m} R(f, g_i)$

On a $U = \bigcup_{f \in U} R(f)$

Mais U est compact donc U est une réunion finie d'éléments de \mathfrak{R} i.e. $U = F_A(a)$.

. Il reste à montrer que G est surjectif.

Soit $f \in T(L(\sigma))$ et cherchons un $x \in X$ tel que $G_\sigma(x) = f$ où encore tel que pour tout $Y \in L(\sigma)$, $G_\sigma(x)(Y) = f(Y)$, i.e. $x \in Y \iff f(Y) = 1$.

Posons $H = \{Y \in L(\sigma)/f(Y) = 1\}$ et $A = \bigcap_{Y \in H} Y$, $H' = \{Z \in L(\sigma)/f(Z) = 0\}$ et $B = \bigcup_{Z \in H'} Z$. Notons que H et H' sont stable pour la réunion et l'intersection finis.

On a $A - B \neq \emptyset$, car si $A - B = \emptyset$ alors:

$$\bigcap_{Y \in H} Y - \bigcup_{Z \in H'} Z = \emptyset = \bigcap_{Y \in H} Y \cap C \bigcup_{Z \in H'} Z = \bigcap_{Y \in H} Y \cap \bigcap_{Z \in H'} CZ = \emptyset.$$

La compacité de X implique qu'il existe un nombre fini de $Y_i \in H$, $i = 1 \dots n$,

$Z_j \in H'$, $j = 1 \dots m$. tq $\bigcap_{i=1}^n Y_i \cap \bigcap_{j=1}^m CZ_j = \emptyset$, soit encore $\bigcap_{i=1}^n Y_i - \bigcup_{j=1}^m CZ_j = \emptyset$, donc

$\bigcap_{i=1}^n Y_i \subset \bigcup_{j=1}^m CZ_j$, c-à-d $f(\bigcup_{j=1}^m Z_j) = 1$, ce qui est absurde, car $f(\bigcup_{j=1}^m Z_j) = \bigvee_{j=1}^m f(z_j) = 0$.

On choisit donc un $x \in A - B$, il répond bien à la question.

(e) Supposons que f et h sont comme dans (c) et (d). Montrons que le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{f} & A_2 \\ F_{A_1} \downarrow & & \downarrow F_{A_2} \\ L(T(A_1)) & \xrightarrow{L(T(f))} & L(T(A_2)) \end{array}$$

est commutatif:

$$\begin{aligned}
 (L(T(f)) \circ F_{A_1})(a) &= L(T(f))(F_{A_1}(a)) = T^{-1}(f)(F_{A_1}(a)) \\
 &= \{g \in T(A_2) / T(f)(g) \in F_{A_1}(a)\} \\
 &= \{g \in T(A_2) / g \circ f \in F_{A_1}\} \\
 &= \{g \in T(A_2) / (g \circ f)(a) = 1\} \\
 &= \{g \in T(A_2) / g(f(a)) = 1\} \\
 &= F_{A_2}(f(a)) \\
 &= (F_{A_2} \circ f)(a) \text{ ceci pour tout } a \in A_1
 \end{aligned}$$

D'où $L(T(f)) \circ F_{A_1} = F_{A_2} \circ f$ donc le diagramme précédent est commutatif.

Montrons maintenant que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \sigma_1 & \xrightarrow{h} & \sigma_2 \\
 G_{\sigma_1} \downarrow & & \downarrow G_{\sigma_2} \\
 T(L(\sigma_1)) & \xrightarrow{T(L(h))} & T(L(\sigma_2))
 \end{array}$$

est commutatif :

$$\begin{aligned}
 (T(L(h)) \circ G_{\sigma_1})(x) &= T(L(h))(G_{\sigma_1}(x)) \\
 &= G_{\sigma_1}(x) \circ L(h)
 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
 G_{\sigma_1}(x) \circ L(h)(Y) &= G_{\sigma_1}(x)(h^{-1}(Y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in h^{-1}(Y) \\ 0 & \text{si } x \notin h^{-1}(Y) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1 & \text{si } h(x) \in Y \\ 0 & \text{si } h(x) \notin Y \end{cases} \\
 &= G_{\sigma_2}(h(x)) = G_{\sigma_2} \circ h(x)
 \end{aligned}$$

Le diagramme précédent est donc commutatif. ■

Conclusion 2.5.1 *Ce théorème montre que la catégorie des espaces de Priestley est équivalente à la catégorie duale des treillis distributifs fermés.*

Chapitre 3

Exemples

Nous avons donné quelques exemples, à partir de ces exemples nous avons illustré les théorèmes de deuxième chapitre.

Contenu:

1. Exemples des treillis distributifs fermés,
2. Exemples des espaces de priestley.

3.1 Exemples des treillis distributifs fermés

Exemple 3.1.1 Soit $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ et R une relation donnée par :

R	a	b	c	d	e	f
a	1	1	1	1	1	1
b	0	1	1	1	1	1
c	0	0	1	0	1	1
d	0	0	0	1	1	1
e	0	0	0	0	1	1
f	0	0	0	0	0	1

Le graphe de R est :

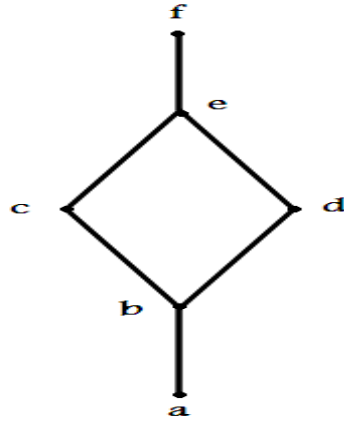


Figure 3.1.1 : Le diagramme d'exemple 1

Donc (A, \wedge, \vee, R) un treillis distributif fermé.

Les filtres propres de A sont:

$$F_1 = \{b, c, d, e, f\}, F_2 = \{c, e, f\}, F_3 = \{e, f\}, F_4 = \{d, e, f\}, F_5 = \{f\}$$

Les filtres de A sont tous premiers sauf F_3 , donc l'espace de Priestley de A ($\{f : A \rightarrow \{0, 1\} \mid f \text{ homomorphisme}\}$) est

$T(A) = X = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ formé des fonctions caractéristiques des filtres premiers A .

$x \setminus f_i$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
a	0	0	0	0
b	0	0	0	1
c	0	1	0	1
d	0	0	1	1
e	0	1	1	1
f	1	1	1	1

$X = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ définie par le tableau précédent.

$$L(T(A)) = L(X) = \{\emptyset, \{f_4\}, \{f_2, f_4\}, \{f_3, f_4\}, \{f_2, f_3, f_4\}, X\}.$$

Soit R_2 définie par:

$$R_2(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \subseteq B; \\ 0 & \text{dans les autre cas.} \end{cases}$$

et donnée par le tableau suivant:

R_2	\emptyset	$\{f_4\}$	$\{f_2, f_4\}$	$\{f_3, f_4\}$	$\{f_2, f_3, f_4\}$	X
\emptyset	1	1	1	1	1	1
$\{f_4\}$	0	1	1	1	1	1
$\{f_2, f_4\}$	0	0	1	0	1	1
$\{f_3, f_4\}$	0	0	0	1	1	1
$\{f_2, f_3, f_4\}$	0	0	0	0	1	1
X	0	0	0	0	0	1

Finalement :

$F_A : A \rightarrow L(T(A))$ définie par :

A	$F_A(a_i)_{i=1\dots 6}$
a	\emptyset
b	$\{f_4\}$
c	$\{f_2, f_4\}$
d	$\{f_3, f_4\}$
e	$\{f_2, f_3, f_4\}$
f	X

Exemple 3.1.2 Soit $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ et R une relation définie sur A par :

R	a	b	c	d	e	f	g	h
a	1	1	1	1	1	1	1	1
b	0	1	0	0	1	1	0	1
c	0	0	1	0	1	0	1	1
d	0	0	0	1	0	1	1	1
e	0	0	0	0	1	0	0	1
f	0	0	0	0	0	1	0	1
g	0	0	0	0	0	0	1	1
h	0	0	0	0	0	0	0	1

Le graphe de R est :

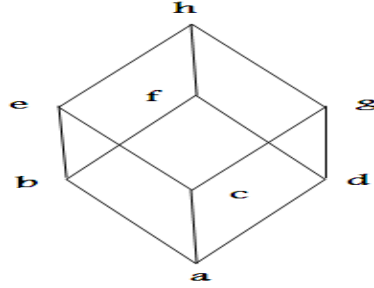


Figure 3.1.2: Le diagramme d'exemple 2

Les filtres propres de A sont:

$F_1 = \{b, e, f, h\}, F_2 = \{c, e, g, h\}, F_3 = \{d, f, g, h\}, F_4 = \{e, h\}, F_5 = \{f, h\}, F_6 = \{g, h\}, F_7 = \{h\}$ en nombre de 7,

dont 3 filtres premiers à savoir F_1, F_2, F_3 qui des filtres maximaux.

Donc X est donnée par:

$x_i \setminus f_i$	f_1	f_2	f_3
a	0	0	0
b	1	0	0
c	0	1	0
d	0	0	1
e	1	1	0
f	1	0	1
g	0	1	1
h	1	1	1

$$L(T(A)) = \{\emptyset, \{f_1\}, \{f_2\}, \{f_3\}, \{f_1, f_2\}, \{f_2, f_3\}, \{f_1, f_3\}, X\}.$$

Soit R_2 définie par:

$$R_2(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \subseteq B; \\ 0 & \text{dans les autre cas.} \end{cases}$$

et donnée par le tableau suivant:

R_2	\emptyset	$\{f_1\}$	$\{f_2\}$	$\{f_3\}$	$\{f_1, f_2\}$	$\{f_1, f_3\}$	$\{f_2, f_3\}$	X
\emptyset	1	1	1	1	1	1	1	1
$\{f_1\}$	0	1	0	0	1	1	0	1
$\{f_2\}$	0	0	1	0	1	0	1	1
$\{f_3\}$	0	0	0	1	0	1	1	1
$\{f_1, f_2\}$	0	0	0	0	1	0	0	1
$\{f_1, f_3\}$	0	0	0	0	0	1	0	1
$\{f_2, f_3\}$	0	0	0	0	0	0	1	1
X	0	0	0	0	0	0	0	1

Finalement:

$F_A : A \rightarrow L(T(A))$ défini par:

A	$F_A(a_i)_{i=1\dots 8}$
a	\emptyset
b	$\{f_1\}$
c	$\{f_2\}$
d	$\{f_3\}$
e	$\{f_1, f_2\}$
f	$\{f_1, f_3\}$
g	$\{f_2, f_3\}$
h	X

3.2 Exemples des espaces de Priestley

Exemple 3.2.1 Soit (X, τ, r) un espace de Priestley avec $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ et r défini par :

r	a	b	c	d	e
a	1	0	0	0	0
b	0	1	0	0	0
c	0	0	1	0	0
d	0	0	0	1	0
e	0	0	0	0	1

Le graphe de r est :

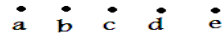


Figure 3.2.1: Le diagramme d'exemple 1.

Donc:

$$L(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{b, d, e\}, \{c, d, e\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}, \{a, d, e\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, X\}.$$

$$T(L(X)) = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$$

$X_i \setminus f(X_i)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
\emptyset	0	0	0	0	0
$\{a\}$	1	0	0	0	0
$\{b\}$	0	1	0	0	0
$\{c\}$	0	0	1	0	0
$\{d\}$	0	0	0	1	0
$\{e\}$	0	0	0	0	1
$\{a, b\}$	1	1	0	0	0
$\{a, c\}$	1	0	1	0	0
$\{a, d\}$	1	0	0	1	0
$\{a, e\}$	1	0	0	0	1
$\{b, c\}$	0	1	1	0	0
$\{b, d\}$	0	1	0	1	0
$\{b, e\}$	0	1	0	0	1
$\{c, d\}$	0	0	1	1	0
$\{c, e\}$	0	0	1	0	1
$\{d, e\}$	0	0	0	1	1
$\{a, b, c\}$	1	1	1	0	0
$\{a, b, d\}$	1	1	0	1	0
$\{a, b, e\}$	1	1	0	0	1
$\{b, c, e\}$	0	1	1	0	1
$\{b, c, d\}$	0	1	1	1	0
$\{a, d, c\}$	1	0	1	0	0
$\{a, d, e\}$	1	0	0	1	1
$\{c, d, e\}$	0	0	1	1	1
$\{a, c, e\}$	1	1	1	0	1
$\{b, d, e\}$	0	1	0	1	1
$\{a, b, c, d\}$	1	1	1	1	0
$\{a, b, c, e\}$	1	1	1	0	1
$\{a, b, d, e\}$	1	1	0	1	1

$\{a, c, d, e\}$	1	0	1	1	1
$\{c, b, d, e\}$	0	1	1	1	1
X	1	1	1	1	1

Finalement:

$G_X : X \rightarrow T(L(A))$ défini par:

X	$G_x(X_i)_{i=1..4}, X_i \in X$
a	f_1
b	f_2
c	f_3
d	f_4
e	f_5

Exemple 3.2.2 Soit (X, τ, r) un espace de Priestley tel que $X = \{a, b, c\}$ et r donnée par:

r	a	b	c
a	1	0	1
b	0	1	1
c	0	0	1

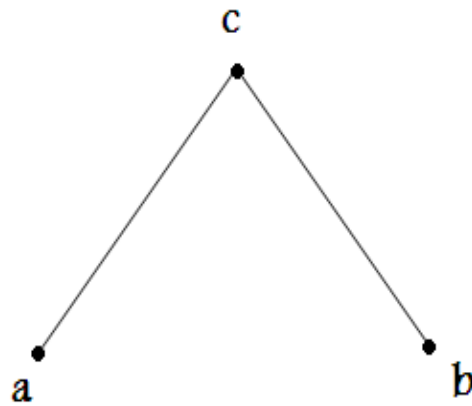


Figure 3.2.2: Le diagramme d'exemple 2.

$$L(x) = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$$

Et soit r_1 définit par:

$$r_1(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \subseteq B; \\ 0 & \text{dans les autre cas.} \end{cases}$$

et donnée par le tableau suivant:

r_1	\emptyset	$\{c\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	X
\emptyset	1	1	1	1	1
$\{c\}$	0	1	1	1	1
$\{a, c\}$	0	0	1	0	1
$\{b, c\}$	0	0	0	1	1
X	0	0	0	0	1

et $T(L(X)) = \{f_1, f_2, f_3\}$ ou

$L(X)$	f_1	f_2	f_3
\emptyset	0	0	0
$\{c\}$	1	0	0
$\{a, c\}$	1	1	0
$\{b, c\}$	1	0	1
X	1	1	1

Et l'isomorphisme $G_X : X \rightarrow T(L(X))$ donné par:

X	$G_x(X_i), X_i \in X$
a	f_1
b	f_2
c	f_3

Exemple 3.2.3 Soit (X, τ, r) un espace de Priestley tel que $X = \{a, b, c, d\}$ et r est donnée par:

r	a	b	c	d
a	1	1	1	1
b	0	1	1	1
c	0	0	1	1
d	0	0	0	1

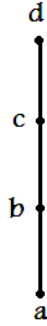


Figure 3.2.3: Le diagramme d'exemple 3.

$$L(X) = \{\emptyset, \{d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, X\}$$

Et R_2 relation défini par:

$$r_2(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \subseteq B; \\ 0 & \text{dans les autre cas.} \end{cases}$$

et donnée par

r_2	\emptyset	$\{d\}$	$\{c, d\}$	$\{b, c, d\}$	X
\emptyset	1	1	1	1	1
$\{d\}$	0	1	1	1	1
$\{c, d\}$	0	0	1	1	1
$\{b, c, d\}$	0	0	0	1	1
X	0	0	0	0	1

$$T(L(X)) = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$$

$X_i \setminus f(X_i)$	f_1	f_2	f_3	f_4
\emptyset	0	0	0	0
$\{d\}$	1	0	0	0
$\{c, d\}$	1	1	0	0
$\{c, b, d\}$	1	1	1	0
X	1	1	1	1

Et l'isomorphisme G_x défini par:

$G_x : X \rightarrow T(L(X))$ et donné par:

X	$G_x(X_i)_{i=1\dots 4}, X_i \in X$
a	f_1
b	f_2
c	f_3
d	f_4

3.3 Conclusion

Dans ce travail on a refait la démonstration du théorème (du à H. Stone) qui dit que la catégorie duale des espace de Priestley est isomorphe à la catégorie des treillis distributifs fermés et ceci en utilisant les techniques de Priestley et on a illustré ce résultat par des exemples dans le cas fini.

Et ceci après avoir donné les outils nécessaires à l'introduction des espaces de Priestley et les notions liées a ce thème.

Bibliographie

- [1] N. Caspard, B. Leclerc, B. Monjardet, *Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats, et usages*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [2] B. A. Davey, H. A. Priestley, *Lattices and order*, second edition, Cambridge University Press, 2002.
- [3] A. Filipoiu, Representation of Lukasiewics algebras by means of ordered Stone spaces, Discrete Mathematics, 30,2 (1980),111-116.
- [4] M. Pouzet, *Théorie de l'ordre : une introduction. "Sous impression"*,
- [5] H. A. Priestley, Representation of distributive lattice by Means of ordered Stone space, Bull London Math Soc 2 (1970)186-190.
- [6] H. A. Priestley, Ordered set and dualite for distributive lattices, Ann. Discrete Math 23 (1984) 39-60.
- [7] S. Roman, *Lattice and ordered sets*, Springer (2008).